DIMOSTRAZIONE

DELLA

PROPOSIZIONE FONDAMENTALE

DELL' EQUIVALENZA DELLE FIGURE

DEL M. E. G. VERONESE

(Nota presentata nella seduta del 23 dicembre 1894)

La proposizione è quella che si dà come postulato e si enuncia anche così:

A. *Una figura finita non è equivalente ad una sua parte.*

Siccome la equivalenza riguarda delle figure ciò che nei miei *Fondamenti di Geometria* (1) chiamai grandezza intensiva (che è la lunghezza pel segmento rettilineo, l'angolo pel settore angolare, l'area per le figure piane, il volume per le solide) così la definizione dell' equivalenza deve riguardare anche il caso che il numero delle parti eguali in cui vengono decomposte due figure equivalenti sia infinito, in guisa che ad ogni parte dell'una corrisponda una ed una sola parte eguale dell' altra. Di tale estensione del concetto di equivalenza bisogna tener conto nella dimostrazione del postulato se si vuole definire quando una figura A sia rispetto alla sua grandezza intensiva maggiore o minore di un'altra B, per modo che uno qualunque dei tre casi $A \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} B$ escluda gli altri due.

(1) Padova, 1891. Essi furono tradotti in tedesco recentemente dal sig. luogotenente ing. Ad. Schepp e pubblicati coi tipi del Teubner.

Nei miei *Fondamenti* non mi sono occupato della teoria dell'equivalenza; però ho dichiarato a pag. XXXVII che tutte le proposizioni della geometria elementare del piano e degli iperspazî Euclidei si deducono dagli assiomi da me stabiliti, fra i quali non è compreso quello dell'equivalenza, e che la retta può essere assunta come elemento fondamentale di costruzione delle figure e di riferimento delle grandezze geometriche (1). Frattanto il sig. Réthy tentò di dare una dimostrazione per quelle figure piane, che si lasciano scomporre in un numero finito di parti eguali, ammettendo tacitamente il postulato che la parte non è eguale al tutto (2). Il sig. Schur (3) e poi il sig. Rausenberger (4) accennarono ciascuno ad una dimostrazione, l'uno pei poligoni rettilinei piani e per parti rettilinee di essi, l'altro anche pei poligoni sferici, senza però che essi abbiano forniti gli elementi necessari per giudicare se la loro dimostrazione eviti il detto postulato.

Siccome in seguito ad una promessa fatta nella prefazione del mio libro sto occupandomi da qualche tempo con la collaborazione del prof. Gazzaniga del R. Liceo di Padova di adattare i principî ivi svolti pel sistema Eu-

(1) Veggasi anche le mie « Osservazioni sui principii della geometria. » (R. Acc. di Padova ad. 10 Giugno 1894, pag. 20).

(2) Math. Annalen, Vol. 38 e 42. — Veggasi anche la critica del sig. Dobriener l. c., Vol. 42.

(3) Sitzungen Ber. der Dorpater Naturfors. Ges., 1892. Vedi anche Periodico di Matematica, 1893. — Durante la stampa di questa nota ebbi conoscenza degli schiarimenti intorno alla suddetta dimostrazione pubblicati dal sig. Biasi nel fascicolo dell'agosto u. s. dello stesso periodico e a lui comunicati dal prof. Schur. Manca anche qui la dimostrazione di una proposizione importante, mentre è necessaria per la dimostrazione della proposizione fondamentale.

In questa nota il signor Schur suppone che il numero delle parti eguali in cui vengono divise due figure equivalenti sia finito.

(4) Math. Annalen, Vol. 44.

clideo all' insegnamento della geometria nei Licei, così ebbi occasione in quest'anno di occuparmi nuovamente della teoria dell'equivalenza. (1)

È noto in Italia che il prof. De Paolis coi suoi *Elementi di Geometria* ha messo in maggior luce in questi ultimi anni il postulato di questa teoria, mentre erasi tentato invano da altri di dimostrarlo (2). Ma sebbene egli lo abbia ammesso esplicitamente, ha però dimostrate molte proposizioni dell' equivalenza senza far uso di esso. Ed è appunto partendo dalla costruzione che egli dà di un triangolo equivalente ad un altro essendo data l'altezza ed un angolo adiacente alla base eguale ad un angolo dato, e dalla costruzione di un tetraedro equivalente ad un altro, che abbia la stessa altezza e base equivalente, che mi riuscì di dare una dimostrazione completa per tutte le figure in modo geometrico ed elementare.

Siccome l'equivalenza riguarda la grandezza intensiva così bisogna occuparsi del postulato anche pei sistemi ad una dimensione, p. es. pei segmenti rettilinei e per gli angoli. Ammesso che sia pei segmenti rettilinei (nel qual caso quando essi sono equivalenti sono anche eguali), esso si dimostra per gli angoli (3).

Per *parte* di un segmento rettilineo o di una spezzata *s* s'intende un altro segmento rettilineo o un altra spez-

(1) Nell' aprile 1895 sarà litografata la prima parte di questi *Elementi.*

(2) Vedi Periodico di Matematica, Vol. I, fasc. I, II, 1886. Il sig. Faifofer, che tentò di dimostrare in questo periodico il postulato, lo ha poi ammesso nei suoi recenti *Elementi di Geometria.*

(3) La dimostrazione del postulato data da De Paolis (El. di Geometria teor. 56 pag. 42) per i segmenti rettilinei e per gli angoli senza un postulato non è rigorosa.

zata s' che appartiene a s senza che s appartenga ad s'. Analogamente pei settori angolari (1).

Per *parte poligonale* di un poligono rettilineo piano s' intende un poligono o una figura determinata da una somma di poligoni rettilinei piani che appartiene al poligono dato senza contenere tutte le parti di questo.

Per poliedri a facce piane intenderemo quelli che o sono convessi a facce piane oppure sono composti di tali poliedri. La *parte poliedrica* di un poliedro a facce piane si definisce in modo analogo a quella poligonale (2).

Dimostreremo intanto la proposizione A per queste specie di grandezze senza ammettere alcun altro postulato, salvo che pei segmenti.

Per *figure equivalenti* intendiamo quelle che possono essere divise in parti rispettivamente una ad una eguali (non escluso che il loro numero sia anche infinito) o sono determinate da somme di parti rispettivamente eguali.

Si ricava tosto che somme di figure eguali o equivalenti sono pure equivalenti; che due figure eguali sono pure equivalenti e che figure equivalenti ad una terza sono equivalenti fra loro. Per figure eguali non intendiamo solo le sovrapponibili nello spazio ordinario (congruenti) ma anche le simmetriche (3).

(1) Il settore angolare è a sua volta una parte del fascio di raggi, come il segmento rettilineo è una parte limitata della retta. Vedi Fond. di Geom., pag. 281.

(2) Per poligono o poliedro convesso s' intende qui la parte finita di piano o spazio da essi determinata. Vedi Fond. di Geom., ad es. 319 e nota XLIX.

(3) Fond. di Geom. ad es. pag. 417.

I.

Ammessa la proposizione A pei segmenti rettilinei si dimostra che un segmento rettilineo (AB) non può essere eguale ad una sua parte (AB_1), perchè due figure eguali sono anche equivalenti e quindi (AB) sarebbe equivalente ad una sua parte. Se si ammette invece che un segmento non sia eguale ad una sua parte (ciò che è più semplice), si dimostra che un segmento non è equivalente ad una sua parte, perchè (AB) e (AB_1) dovrebbero scomporsi in segmenti consecutivi rispettivamente eguali [1]

Per i settori angolari la proposizione A si dimostra così: Siano (ab), (ac) due settori angolari eguali nello stesso verso di un medesimo fascio di raggi di centro O, e si considerino due punti B e C tali che $(OB) \equiv (OC)$. La retta BC incontra la retta a in un punto A esterno al segmento (BC), essendo ad es. b interno al settore (ac). I triangoli AOB, AOC dovrebbero essere eguali per avere due lati e il settore angolare compreso eguale, e perciò sarebbe $(AB) \equiv (AC)$, il che è assurdo.

II.

Si dimostra senza far uso del postulato, che due triangoli della medesima base e della stessa altezza sono equivalenti [2].

(1) In tal caso si può applicare la dimostr. del teor. I del n. 53 degli *Elementi* di De Paolis.

(2) Per la dimostrazione si può seguire il De Paolis (El. di Geom. teor. 356, 327 pag. 293-296).

Premesse le precedenti considerazioni si può seguire un altro me-

Per costruire un triangolo equivalente ad un dato essendo data un'altezza si procede così:

Sia ABC il triangolo, r la parallela al lato BC e alla distanza a eguale all'altezza data. Sia F il punto d'incontro con AC, si congiunga B con F, e da A si conduca la parallela a BF che incontra BC nel punto D. Il segmento (CD) è la base del triangolo cercato.

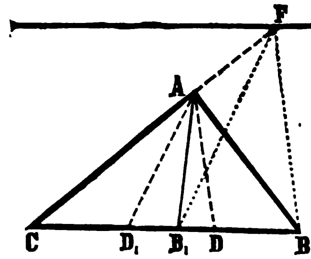

fig. 1

Ad un triangolo si può far corrispondere un segmento tale che se si divide il triangolo in due (e quindi anche in più) triangoli con rette passanti per uno qualunque dei suoi vertici, la somma dei segmenti corrispondenti è eguale al segmento corrispondente all'intero triangolo.

Sia CAB_1 una parte del triangolo CAB, e si costruisca il triangolo FCD_1 equivalente a CAB_1. Dai triangoli CAD_1, CFB_1; CAD, CFB si ha $(CD_1):(CB_1)=(CA):(CF)$; $(CD):(CB)=(CA):(CF)$, cioè le basi dei due triangoli di altezza a equivalenti ai triangoli CAB, CAB_1 stanno fra loro come le basi di questi triangoli. Ma $(D_1D):(CD)=(B_1B):(CB)$, dunque (D_1D) è il segmento corrispondente al triangolo B_1AB. In altre parole il segmento corrispondente al triangolo

todo (e in modo analogo per le proposizioni che enunceremo per i poliedri) dimostrando che ad ogni rettangolo (e così ad ogni parallelepipedo rettangolo) corrisponde un simbolo che indica l'operazione colla quale esso si ottiene da un quadrato (o da un cubo) dato. Da ciò risulta subito che un rettangolo è equivalente ad un altro rettangolo di data altezza. È dimostrato che il doppio di un triangolo è equivalente a un rettangolo di base e altezza rispettivamente eguali, al doppio del triangolo si fa corrispondere lo stesso simbolo di questo rettangolo, che rappresenta pure un segmento rettilineo, cioè la base di questo rettangolo rispetto all'altezza data.

ABC è eguale alla somma dei segmenti corrispondenti ai due triangoli ottenuti colla divisione del triangolo ABC con una retta passante pel vertice A.

Supponiamo invece che la retta passi pel vertice C e divida il triangolo nei triangoli ACD, DCB. Sia $A_1C_1B \equiv ACB$, si ha $(BC) \equiv (BC_1)$, $(AB) \equiv (A_1B)$ e quindi AA_1 è parallela a CC_1. Il triangolo equivalente al triangolo A_1C_1B di altezza eguale a quella di A nel triangolo ABC è precisamente

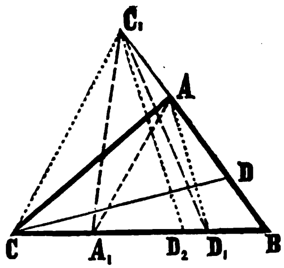

fig. 2

ABC; e quindi ai triangoli ACD, DCB oppure ai triangoli eguali $A_1C_1D_1$, D_1C_1B corrispondono dei triangoli di vertice A cioè CAD_2, D_2AB le cui basi danno per somma (BC). I segmenti corrispondenti ai triangoli CAD_2, D_2AB corrispondono ai triangoli ACD, DCB.

Un poligono che non sia convesso si può sempre ritenere come somma di poligoni convessi, ed ognuno di questi poligoni è somma dei triangoli che uniscono un punto interno al poligono o del perimetro di esso coi suoi lati. Ad ogni poligono corrisponde così un segmento somma di quelli corrispondenti ai triangoli secondo la costruzione sopra indicata. (1)

(1) Col metodo indicato nella nota precedente si evita la teoria delle proporzioni, perchè ai doppî delle due parti in cui viene diviso il triangolo ABC dalla retta AB_1 corrispondono due segmenti la cui somma dà il segmento corrispondente alla base (BC) del triangolo ABC. La proposizione è in tal caso un'immediata conseguenza delle premesse. Per le proposizioni seguenti si procede nello stesso modo, considerando anzichè il poligono il doppio del poligono. Il corollario viene dimostrato per la figura costituita da due poligoni eguali ad un dato, ed allora riesce pure dimostrato per il poligono semplice, chè se non valesse per questo non varrebbe neppure pel poligono doppio.

Qualunque sia la divisione di un poligono in parti poligonali, la somma dei segmenti ad esse corrispondenti secondo la costruzione indicata dà il medesimo segmento.

Sia dapprima ABC un triangolo e AD divida il triangolo in due triangoli colla stessa altezza passante per A, le cui basi danno per somma la base (AB). La somma dei segmenti corrispondenti ai detti triangoli nel modo sopra indicato è eguale al segmento corrispondente ad ABC.

Una divisione del triangolo in parti avviene dapprima con una retta che divide il triangolo in due parti. Questa retta o passa per un vertice, ed allora anche se non passa per A, per la dimostrazione del teorema precedente, i segmenti corrispondenti ai due triangoli in cui viene diviso ABC sono quelli corrispondenti ai triangoli equivalenti di vertice A, e il teorema è dimostrato. Se invece la retta incontra due lati del triangolo ad es. (AB), (AC) in due punti X e Y, in tal caso il triangolo viene diviso nel triangolo AXY e nella parte XYBC che viene divisa dalla retta BY nei due triangoli BXY, YBC. Tirando dunque la retta BY, dal triangolo ABC si hanno i due triangoli ABY, YBC, e poi colla retta YX i due triangoli BYX, YXA. Anche in tal caso dunque riferendo sempre i triangoli ottenuti a triangoli equivalenti aventi il vertice in A e gli altri vertici sul lato (BC) nel modo sopra indicato, il teorema resta dimostrato.

La ulteriore divisione del triangolo ABC in parti avviene mediante un'altra retta la quale divide nei due modi anzidetti tutti o alcuni dei triangoli in cui fu diviso il triangolo dato. Così seguitando si ha che qualunque sia la divisione del triangolo dato in parti, e quindi anche in triangoli, essa si può ottenere colla costruzione suddetta, e la somma dei segmenti corrispondenti ai triangoli che hanno per altezza un segmento dato è eguale al segmento corrispondente al triangolo.

Se si ha un poligono convesso diviso in triangoli con un vertice comune O nell' interno di esso, o sul suo perimetro, ogni divisione in parti del poligono determina una divisione in parti dei triangoli di vertice O e quindi anche in triangoli, e per ciò il segmento corrispondente al poligono è sempre il medesimo qualunque sia la divisione del poligono in parti.

Coroll. *Un poligono rettilineo non è equivalente ad una sua parte poligonale.*

Sia P il poligono, P′ e P″ due parti tali che P $=$ P′ $+$ P″. A P′ e P″ corrispondono due segmenti s' e s'' secondo la costruzione sopra indicata, la cui somma è il segmento s corrispondente a P. Se P fosse equivalente a P′, sarebbe s equivalente ad s' e quindi eguale a s', il che è assurdo (I).

Due triangoli della stessa altezza e di basi diseguali non possono essere equivalenti. Se fossero equivalenti lo sarebbero anche i rettangoli aventi le stesse basi e la stessa altezza dei triangoli dati e l' uno sarebbe eguale ad una parte dell'altro, il che non può essere per il corollario precedente. Così a due triangoli (e quindi anche a due poligoni) non equivalenti non possono corrispondere segmenti eguali secondo la costruzione precedente, perchè trasformati in due triangoli equivalenti della stessa altezza questi devono essere di base diversa, e per la costruzione precedente corrispondono ad essi segmenti diseguali.

Potendo dunque far corrispondere univocamente i poligoni ai segmenti della retta e viceversa, fissata che sia l'altezza dei triangoli equivalenti a quelli in cui si scompone il poligono, e siccome i segmenti della retta costituiscono un sistema lineare omogeneo continuo, così diremo che i poligoni piani rispetto alla loro grandezza intensiva costituiscono un *sistema lineare omogeneo e continuo* al quale si estendono le proprietà di un tale sistema. (1)

(1) Fond. di geom. introd.

III.

Per dimostrare la proposizione A nello spazio bisogna premettere la proposizione: due prismi triangolari che hanno basi eguali o equivalenti e altezze eguali sono equivalenti.

Un tetraedro possiamo ritenerlo determinato in modo unico dalla serie di prismi triangolari interni inscritti in esso e colle facce triangolari parallele alla base, e quindi due tetraedri secondo la data definizione sono equivalenti se sono divisibili in prismi rispettivamente eguali, il che avviene appunto come d'ordinario si dimostra, quando essi hanno la stessa base e la stessa altezza, senza far uso però del concetto di limite. Si dimostra pure senza la proposizione A che due tetraedri della stessa altezza e di basi equivalenti sono equivalenti. (1)

Per costruire un tetraedro equivalente ad un dato essendo data l'altezza, si procede così:

Sia ABCX il tetraedro la cui faccia ABC sia quella della figura 1, e sia r la traccia di un piano parallelo alla faccia BCX alla distanza eguale all'altezza data. Si trasformi il triangolo ABC nel modo indicato in un triangolo CFD equivalente al dato. Il tetraedro FCDX è equivalente ad ABCX.

Ad un tetraedro si può far corrispondere un segmento tale che se il tetraedro si divide in due (e quindi anche in più) tetraedri con piani passanti per uno qualunque degli spigoli, la somma dei segmenti corrispon-

(1) Per la dimostrazione di queste proposizioni indipendentemente dalla proposizione A veggasi De Paolis l. c. pag. 311-315-343. Anche per questa parte si può seguire un metodo analogo a quello accennato nella nota a pag. 5.

denti è eguale al segmento corrispondente al tetraedro dato.

Invero al tetraedro XABC si può far corrispondere il segmento (CD) (fig. 1), mentre ai tetraedri $XACB_1$ XB_1AB che si ottengono dal primo col piano XAB_1 corrispondono i segmenti (CD_1) e (D_1D) che hanno per somma (CD).

Se il piano che divide il tetraedro in due altri passa per un altro degli spigoli che contengono il vertice A, basta servirsi della dimostrazione già data pel triangolo. Se il piano passa invece per BX, dimostriamo che ai due tetraedri così ottenuti nel tetraedro ABCX si possono far corrispondere due tetraedri ad essi equivalenti che compongono lo stesso tetraedro e si ottengono da questo con un piano che passa per lo spigolo AX. A tale scopo costruiamo un tetraedro B_1A_1CX eguale al dato (fig. 3), e conduciamo da A_1 e B_1 le parallele a CD fino ad incontrare AC e BC nei punti B' e A'. I triangoli $XA'C$, XA_1C sono equivalenti, e perciò anche il tetraedro $A'B'CX$ è equivalente al tetraedro A_1B_1CX e quindi anche al dato ABCX.

Le rette AA', BB' sono parallele. Infatti lo sono AA_1, BB_1 perchè condotti da AA_1, BB_1 i piani perpendicolari $AA_1\alpha$, $BB_1\beta$ alla retta CD portando in αA, αA_1 a partire da α i segmenti $\alpha B^{(1)}$, $\alpha B_1^{(1)}$ eguali a (βB), (βB_1), la retta $B^{(1)}B_1^{(1)}$ è parallela ad AA_1. Essa è parallela anche a BB_1 per l'eguaglianza dei triangoli $B\beta B_1$, $B^{(1)}\alpha B_1^{(1)}$ e pel parallelismo dei loro piani, dunque anche AA_1 e BB_1 sono parallele. Ma $A'A_1$, $B'B_1$ sono pure parallele, e quindi i due triangoli $AA'A_1$, $BB'B_1$ stanno in piani paralleli e perciò

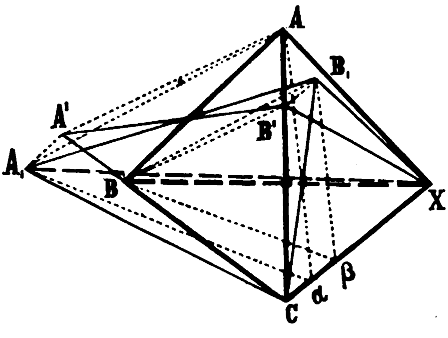

fig. 3

vengono tagliati dal piano BCA nelle due rette AA′ e BB′ parallele. Si ha dunque che ABC è equivalente al triangolo A′B′C secondo la costruzione data nella fig. 1.

Dividere il tetraedro ABCX con un piano passante per BX equivale a dividere il tetraedro eguale A_1B_1CX con un piano passante per B_1X in due tetraedri che hanno per basi due triangoli ottenuti da A_1CX con una retta passante per X. A questi due triangoli ne corrispondono altri due ad essi equivalenti del triangolo A′XC ottenuti con una retta passante per X, i quali sono alla loro volta basi di due tetraedri che compongono A′B′XC, sono equivalenti a quelli di A_1B_1XC e si ottengono con un piano passante per B′X. Siccome il vertice X e il piano della faccia ABC sono comuni ai due tetraedri ABCX, A′B′CX, così ai due tetraedri determinati in quest'ultimo da un piano passante per B′X corrispondono due tetraedri equivalenti ottenuti dal tetraedro ABCX con un piano passante per AX, e quindi i segmenti corrispondenti a questi tetraedri corrispondono anche a quelli di A′B′CX e quindi anche a quelli equivalenti di ABCX ottenuti con un piano che passa per BX. Il teorema è così dimostrato.

Qualunque sia la divisione di un poliedro a facce piane in parti poliedriche la somma dei segmenti ad esse corrispondenti secondo la costruzione indicata dà il medesimo segmento.

Per poliedro e parti poliedriche di un poliedro consideriamo delle figure che si compongono di poliedri convessi. Ogni poliedro convesso si scompone in tetraedri con un vertice comune nell'interno o sulla superficie di esso, e la somma dei segmenti corrispondenti secondo la costruzione indicata nella dimostrazione del teorema precedente corrisponde al poliedro stesso. E a un poliedro o a una parte poliedrica che si compone di poliedri convessi corrisponderà il segmento somma dei segmenti ad essi corrispondenti.

Consideriamo dapprima un tetraedro. La divisione in parti di un tetraedro ABCD viene fatta da un primo piano che o passa per uno spigolo, e si ricade nel caso del teorema precedente, o da un piano che passa per un solo vertice, o da un piano che incontra tre spigoli concorrenti in un vertice o finalmente da un piano che incontra due coppie di spigoli opposti. (1)

Nel secondo caso (fig. 4), il tetraedro resta diviso nel tetraedro ABYX e nella piramide AYXCD che viene divisa dal piano AYD nei due tetraedri AYXD, AYDC. Tagliando il tetraedro ABCD dapprima col piano ADY si hanno i due tretraedri ADYB, ADYC, e poi dal tetraedro ABYD si ha col piano AYX i due tetraedri ABYX, AYXD. Anche in tal caso la somma dei segmenti corrispondenti ai tre tetraedri, oppure al tetraedro ABYX e alla parte AYXCD, è eguale al segmento corrispondente al tetraedro ABCD.

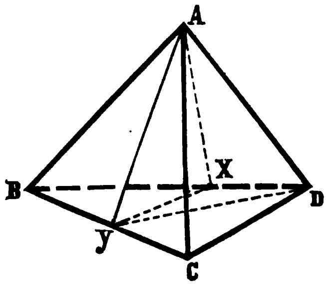

fig. 4

Nel terzo caso (fig. 5) siano XYZ i punti di intersezione coi tre spigoli (AB), (AC), (AD). Il tetraedro rimane scomposto nel tetraedro AXYZ e nel poliedro convesso XYZ BCD. Quest'ultima parte viene divisa dai piani YBZ, YBD nei tetraedri YXZB, YBZD, YBCD che appartengono rispettivamente ai tetraedri YBCD, YABD ottenuti da ABCD col piano BYD. I tre tetraedri contenuti in YABD si ottengono coi piani YXZ, BYZ, e si ricade nel secondo caso.

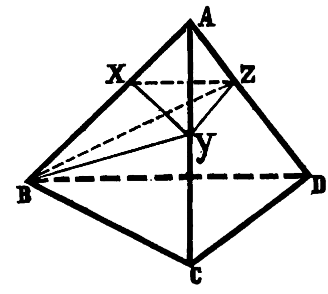

fig. 5

Nel quarto caso (fig. 6) il piano incontri le coppie di

(1) Fond. di Geom. pag. 410.

spigoli concorrenti in A e D, tranne (AD), nei punti XY, ZW; si hanno così le due parti ADXYZW, BCXYZW. I tetraedri YAXZ, YAZD, YZWD costituiscono la prima parte e YBXZ, YBCZ; YCZW costituiscono la seconda parte ed hanno un vertice comune. Il tetraedro ABCD è diviso dal piano YBD nei due tetraedri YABD, YBCD. I tetraedri in essi contenuti si ottengono colla costruzione del secondo caso.

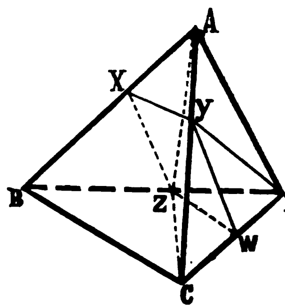

fig. 6

Dunque in ognuno di questi casi la somma dei segmenti corrispondenti ai tetraedri o delle parti in cui viene diviso il tetraedro ABCD è eguale al segmento ad esso corrispondente. La divisione ulteriore del tetraedro in parti viene fatta con un altro piano il quale taglia in uno dei quattro modi anzidetti tutti o alcuni dei tetraedri che costituiscono le parti in cui fu prima diviso, e quindi ripetendo le stesse costruzioni scomporremo le nuove parti in tetraedri sempre con piani passanti per gli spigoli di quelli già ottenuti, dimodochè immaginando una tale costruzione eseguita anche un numero infinito di volte secondo una legge determinata, la somma dei segmenti dei tetraedri è sempre eguale al segmento corrispondente al tetraedro dato. Qualunque sia la divisione in parti, e quindi anche in tetraedri essa si ottiene nel modo indicato e quindi pel tetraedro il teorema è dimostrato.

Se si ha un poliedro convesso e lo si divide in tetraedri nel modo sovraindicato con un vertice comune O, una divisione qualunque in parti $\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_m\ \ldots$ determina una divisione in parti di alcuni o di tutti i tetraedri. Se invece il poliedro è composto di poliedri convessi gli corrisponderà il segmento somma dei segmenti ad essi corrispondenti.

Il teorema è dunque dimostrato.

Coroll. *Un poliedro a facce piane non è equivalente ad una sua parte poliedrica.*

La dimostrazione è eguale a quella di un poligono.

I poliedri a facce piane si possono riferire univocamente come i poligoni ai segmenti rettilinei, e quindi essi formano rispetto alla loro grandezza intensiva un sistema lineare omogeneo e continuo.

IV.

Dimostrata la proposizione A per i segmenti rettilinei, per gli angoli, i poligoni rettilinei e le loro parti rettilinee, i poliedri e le loro parti poliedriche si può definire quando una di queste figure A è maggiore o minore di un'altra figura B della stessa specie.

Chiameremo *grandezze principali* le figure suddette. Il perimetro di un poligono o la superficie di un solido li chiameremo *contorno* della grandezza principale considerata.

Se due figure sono limiti di somme di grandezze principali rispettivamente eguali della stessa specie, esse sono equivalenti, perchè in tal caso le figure differiscono dalle somme suddette per i loro contorni che non sono parti di esse, e quindi le dette somme danno due scomposizioni in parti eguali delle due figure e si rientra nella definizione già data da principio. E per parti di tali figure o delle grandezze principali intenderemo anche le figure determinate nel modo anzidetto contenute nelle prime, senza che contengano tutte le parti di queste.

Può darsi, come ad es. per la circonferenza, che una figura possa essere considerata come limite dei contorni di una serie di grandezze principali della stessa specie, ed in tal caso diremo che due tali figure sono pure *equiva-*

lenti quando sono limiti di due serie di grandezze eguali principali.

In modo analogo si definiscono le parti di queste figure.

Una figura F che è una grandezza principale o limite di una somma di grandezze principali contenute in F, oppure che è limite dei contorni di una serie di grandezze principali, o finalmente che è limite di figure così determinate, non è equivalente ad una sua parte.

1) Nel primo caso sia F_1, F_2, ... F_m... la serie di grandezze principali che ha per limite la figura F, se non è essa stessa una grandezza principale. Un esempio di tale serie si ha da quella dei poligoni regolari inscritti nel cerchio, che ha per limite il cerchio stesso. Alla figura F corrisponde sulla retta un determinato segmento *s* limite della somma dei segmenti corrispondenti alle grandezze principali F_i. Se F' è una parte di F ed è una grandezza principale, o apparterrà ad alcune grandezze della serie, oppure essa sarà limite di parti di queste grandezze. In ogni caso vi deve essere una parte F_1 di F tale che $F' + F_1 \equiv F$. La F_1 sarà determinata da parti di grandezze della serie stessa.

Siano F'_m, F'_{m+1} ecc. parti delle grandezze F_m, F_{m+1} ecc. appartenenti a F_1. Alla F' corrisponde dunque un segmento che differisce da quello corrispondente ad F per i segmenti corrispondenti a F'_m, F'_{m+1} ecc. e quindi la F non può essere equivalente alla F' altrimenti sarebbero equivalenti due segmenti diseguali (I).

Se la F' non è una grandezza principale ma è anche essa determinata allo stesso modo di F da grandezze principali contenute nelle precedenti, alla F' corrisponde pure un segmento diverso da quello della F, e quindi anche in tal caso la F non è equivalente ad F'.

2) Nel secondo caso la F è limite dei contorni F_1 F_2 ... F_m ... di grandezze principali, allora una parte F' di F se non è una grandezza principale che faccia parte dei contorni delle grandezze F_i, è limite di una serie analoga che è parte della precedente, e quindi a F' corrisponde

una parte del segmento corrispondente alla F, e quindi F non è equivalente a F'.

3) Finalmente se la figura F è limite di una serie di figure alla loro volta limiti di serie di grandezze principali, la dimostrazione procede nello stesso modo come nel primo o nel secondo caso.

Coroll. *Ogni linea, superficie o volume intuitivo finito non è equivalente ad una sua parte.*

Invero tali figure si lasciano dividere in parti che soddisfano alla condizione del teorema, e quindi ad esse corrispondono dei segmenti somme dei segmenti corrispondenti alle loro parti che rimangono quindi gli stessi qualunque sia la divisione in parti delle figure date.

Per il cerchio e la circonferenza, il cono, il cilindro, la sfera e le rispettive superficie si può valersi delle note dimostrazioni elementari colle quali si prova che queste figure soddisfano al teorema precedente e se ne calcola la misura.

In modo analogo si procede per le figure dello spazio ad n dimensioni.

Padova, Novembre 1894